一般化ウェーブレット変換とその具体例

奈良ウェーブレット研究集会

新潟大学 教育基盤機構　橋本 紘史

2024 年 11 月 16 日

Coorbit 理論は H. G. Feichtinger と K. Gröchenig が創始したウェーブレット, 関数空間, 群の関係を統一する理論であるが, その内容は初学者には難易度が高いものであった．最近になって E. Berge は初学者に向けた論文 [1] を用意してくれた．今回はこの論文の構成を保ちながら, Coorbit 理論の前半の話をする．

この要旨では, 理論の動機のみを紹介しよう．マザーウェーブレット $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ に対して, ウェーブレットは

$$\psi_{ab}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R}$$

で定義されるが, この対応 $\psi \mapsto \psi_{ab}$ を表す作用素を強調して $U(a,b)$ と書くこととする．この作用素は明らかにユニタリー作用素であり, その積を考えると,

$$\begin{aligned}
U(a',b')U(a,b)\psi(x) &= U(a',b')\left[\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{|a'|}}\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{\frac{x-b'}{a'}-b}{a}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{|a'a|}}\psi\left(\frac{x-(a'b+b')}{a'a}\right) = U(a'a, a'b+b')\psi(x)
\end{aligned}$$

が分かる．代数学で習ったことを思い出すと, この結果は $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ に演算

$$(a',b') \circ (a,b) = (a'a, b'+a'b)$$

を入れた群を考えさせる．この洞察は実際に正しく, 表現論の言葉を用いれば, ウェーブレットはアフィン群 $\mathrm{Aff}(1)$ の $L^2(\mathbb{R})$ 上における強連続ユニタリー表現と見ることができる．従って, 次は連続ウェーブレット変換の定義を表現論の意味で一般化する．

定義 1 (generalized wavelet transform)**.** 位相群 G のユニタリー表現 $(T, \mathcal{H})$ に対して, ある $g \in \mathcal{H}$ を用いた **generalized wavelet transform** または **voice transform** を

$$\mathcal{W}_g[f](x) = \langle f, T(x)g\rangle_{\mathcal{H}}, \qquad x \in G$$

で定義する．

この定義から始まるストーリーの 1 つ目の着地点は, 抽象調和解析で知られている **Duflo-Moore の定理** (論文 [2]) であり, この定理は再生公式よりも少し弱い, generalized wavelet transform の直交関係を保証する．本講演では, この Duflo-Moore の定理までを解説する予定である．

参考文献

[1] E. Berge, A primer on coorbit theory, *J. Fourier Anal. Appl.*, **28**(2022), no.1, Paper No. 2, 61 pp.

[2] M. Duflo, C. C. Moore, On the regular representation of a nonunimodular locally compact group, *J. Funct. Anal.*, **21**(1976), 209–243.