令和6年度4月入学者選抜試験問題

奈良女子大学大学院人間文化総合科学研究科（博士前期課程）

数 物 科 学 専 攻

【　一　般　選　抜　】

試験科目名　：　筆記試験（物　理）

令和５年７月８日（土）

試験時間：１０：００～１２：００

注意事項

（1）問題［Ⅰ］から［Ⅳ］のうち３問題を選択して解答すること。

（2）問題ごとに別々の解答用紙を使って解答すること。
　　１枚の解答用紙に複数の問題の解答を書いた場合は採点の対象としない。

（3）解答用紙は必要に応じて追加できるので，手を挙げて知らせること。

問題冊子の総ページ数　－－－－－－－－－－－　９ページ

[I]

図 1 のように，長さ ℓ の伸び縮みしない軽い棒の両端に，質量 m の球が接続されている二組の物体の衝突を考える。図の右向きを正として，物体 A は速度 $-V$，物体 B は速度 V $(V>0)$ で図の横方向に運動し (図 1(a))，A の下側の球と B の上側の球が原点 O で正面から弾性衝突した (図 1(b))。一回の衝突ののち，物体 A と B はそれぞれの棒の中心の周りに角速度 ω で回転しながら運動した (図 1(c))。以下の問いに答えよ。なお，棒の質量は無視できるものとし，球の大きさは十分に小さいものとする。また，物体 A と B は同一平面内を運動する。

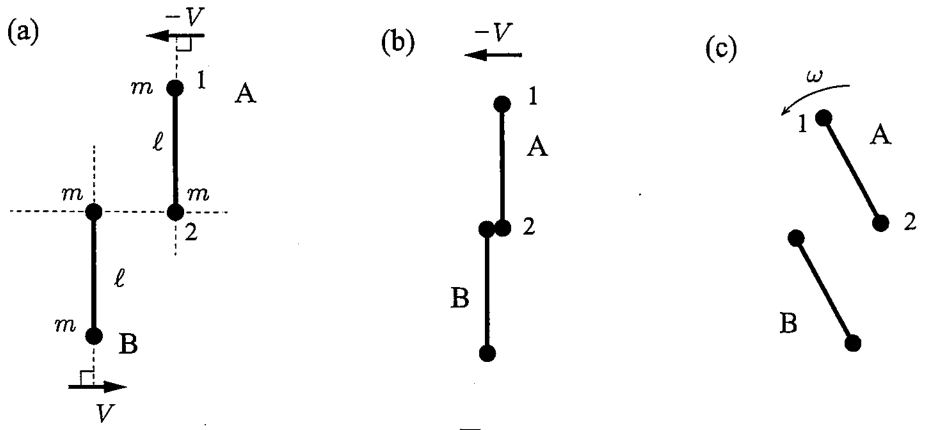

図 1

問 1　物体 A の上側の球を球 1，下側の球を球 2 とする。図 2 のように座標をとったとき，衝突の直後には，球 1 と球 2 は x 軸方向のみの速度を持つと考えてよいので，右向きを正としてそれぞれの衝突直後の速度を v_1，v_2 とする。衝突直後の物体 A の重心 G の速度を v_G とするとき，v_1，v_2 を v_G，ℓ，ω を用いて表せ。

問 2　物体 A と B の系全体には外力がはたらかないので，全系の角運動量の総和は保存する。これを用いて，以下の手順に沿って v_1 を求めよう。

(a) 図 2 のように座標をとったとき，衝突直前の物体 A が原点 O のまわりに持つ角運動量を V，ℓ，m のうち必要なものを用いて書け。 なお，物体 A の角運動量とは，球 1 と球 2 の角運動量の和であり，z 軸は紙面手前向きを正とする。

(b) 衝突直後の物体 A の原点 O のまわりの角運動量を v_1，v_2，ℓ，m のうち必要なものを用いて書け。

(c) この運動は物体 A と B について対称であるので，物体 B も物体 A と同じ角運動量を持つ。衝突の前後の角運動量の保存から，v_1 を V，ℓ，m のうち必要なものを用いて書け。

次ページに続く

[I] の続き

問3　弾性衝突であるので，系全体の運動エネルギーは保存する。また，この運動は物体 A と B について対称であるので運動エネルギーは各物体ごとに保存する。

(a) 物体 A の衝突の前後の運動エネルギーの保存から V と v_1，v_2 の関係を示せ。

(b) (a) の結果と，問 2 の結果から，v_2 を V，m，ℓ のうち必要なものを用いて書け。

(c) これまでの結果から，重心の速度 v_G と回転の角速度 ω を求めよ。

問4　剛体としての物体 A を考える。

(a) 物体 A がもつ，重心 G を通り棒に垂直な回転軸の周りの慣性モーメント I を求めよ。

(b) 衝突後の物体 A の回転エネルギーを I と ω を使って記せ。また，衝突後の物体 A の回転エネルギーと，衝突前の物体 A の運動エネルギーとの大小関係を述べよ。

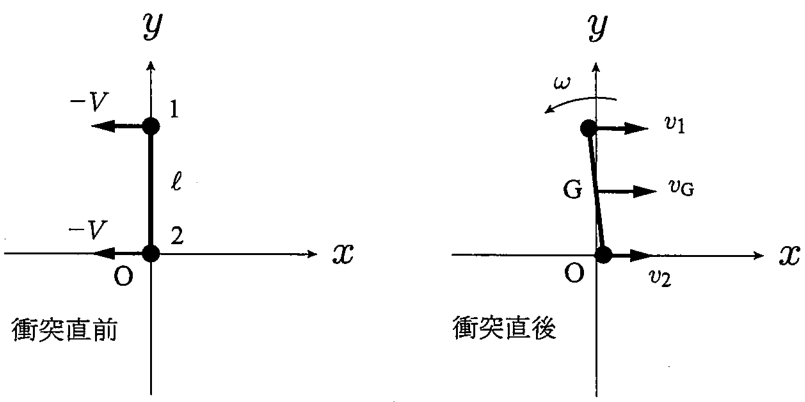

図 2

[II]

図1に示すように，真空中に半径 L の円形の極板AとBを距離 d の間隔で平行に配置したコンデンサーがあり，スイッチSWと抵抗 R からなる回路が接続されている。半径 L と比べて間隔 d は十分短い。最初，スイッチSWは開いており，Aには $+Q_0$ ($Q_0 > 0$)，Bには $-Q_0$ の電荷が一様な面密度で蓄えられている。真空の誘電率を ε_0 として以下の問いに答えよ。

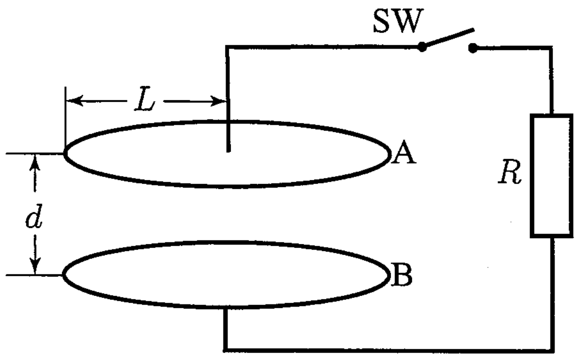

図1

問1　極板AとBの間に生じる電場の向きと，その大きさ E を答えよ。

問2　極板AとBの間の電位差 V とコンデンサーの容量 C を ε_0，L，d，Q_0 のうち必要なものを用いて表せ。

次ページに続く

[II] の続き

問3　時間 $t=0$ でスイッチ SW を閉じた。すると，抵抗 R に電流 $I(t)$ が流れることにより，極板 A の電荷が時間とともに変化する。この電荷を $Q(t)$ とする。

(a) $I(t)$ の大きさは $\dfrac{dQ(t)}{dt}$ で与えられることから，R，C を用いて $Q(t)$ が満たす微分方程式を示せ。さらに，それを解いて $Q(t)$ を求めよ。

(b) 極板 A と B の電荷はいずれも一様な面密度で時間変化するものとする。図 2 に示すように極板 A と B に平行で，A と B の中心を結んだ直線上に中心を持つ半径 r の円板状の領域 S_r を考える。ただし $L > r$ とする。また S_r に垂直な単位ベクトルを $\vec{n}$ とする。S_r の周 C_r に沿って磁場 $\vec{H}$ が生じ，その大きさ H は r の関数であった。

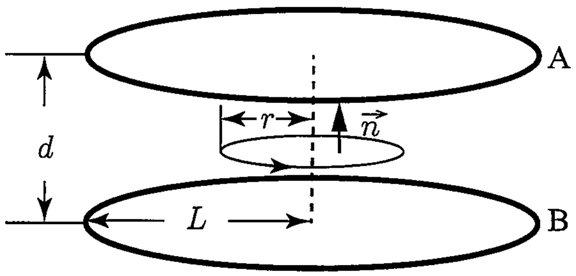

図 2

磁場 $\vec{H}$ と電場 $\vec{E}$ の変化（電束電流または変位電流）の間には

$$\int_{\mathrm{C}_r} \vec{H}\cdot d\vec{r} = \int_{\mathrm{S}_r} \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\cdot\vec{n}\, dS$$

が成り立つとして H を求めよ。ここで左辺は C_r に沿った線積分であり，右辺は S_r での面積分である。

[III]

スピンが s である粒子が，一様な磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の磁場中におかれているものとする。軌道運動は無視してスピンの時間変化だけを考えると，ハミルトニアンは

$$\hat{H} = k\hat{\boldsymbol{s}} \cdot \boldsymbol{B}$$

で与えられる。ここで，$\hat{\boldsymbol{s}} = (\hat{s}_x,\ \hat{s}_y,\ \hat{s}_z)$ はスピン演算子，k は実定数であり，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は，大きさ B で z 軸を向き，$\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ $(B > 0)$ とする。$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ （h : プランク定数）として，以下の問いに答えよ。

問1　スピン $s = \dfrac{1}{2}$ の場合について考える。このとき，スピン演算子は

$$\hat{s}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と表すことができる。

(a) ハミルトニアンの固有値を求めよ。

(b) 時刻 t における粒子のスピン状態を

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix}$$

と表す。シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

を，初期条件

$$\phi_1(0) = \cos\frac{\theta}{2}, \quad \phi_2(0) = \sin\frac{\theta}{2} \quad (\theta\text{: 実定数})$$

のもとで解き，時刻 t における $\phi_1(t)$，$\phi_2(t)$ を求めよ。

(c) 小問 (b) の状態に対して，スピン演算子の期待値

$$\langle s_x \rangle = \langle\psi(t)|\,\hat{s}_x\,|\psi(t)\rangle, \quad \langle s_y \rangle = \langle\psi(t)|\,\hat{s}_y\,|\psi(t)\rangle, \quad \langle s_z \rangle = \langle\psi(t)|\,\hat{s}_z\,|\psi(t)\rangle$$

を求めよ。ここで，$\langle\psi(t)| = (|\psi(t)\rangle)^\dagger$ である。

(d) 小問 (c) の $\langle \boldsymbol{s} \rangle = (\langle s_x \rangle, \langle s_y \rangle, \langle s_z \rangle)$ が，次の方程式をみたすことを示せ。

$$\frac{d\langle \boldsymbol{s} \rangle}{dt} = k\boldsymbol{B} \times \langle \boldsymbol{s} \rangle$$

次ページに続く

[III] の続き

問 2　一般のスピン $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots$ の場合について考える。時刻 t における粒子のスピン状態を $|\Psi(t)\rangle$ とし，規格化されているものとする。この状態に対して，スピン演算子の期待値は

$$\langle s \rangle = \langle \Psi(t) | \, \hat{s} \, | \Psi(t) \rangle$$

で与えられる。$\langle s \rangle$ が問 1(d) と同じ方程式をみたすことを示せ。

[IV]

絶対温度 T の熱浴に接した振動子の性質をカノニカル分布を用いて取り扱う。以下の問いに答えよ。ただし，ボルツマン定数を k_{B}，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ (h：プランク定数)，$\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ とする。内部エネルギー $E(T)$ と分配関数 $Z(T)$ には，$E(T) = -\dfrac{\partial}{\partial\beta}\ln Z(T)$ の関係があることを用いてもよい。さらに，熱容量 $C(T)$ は $C(T) = \dfrac{dE(T)}{dT}$ から求めることができる。

問1　質量 m，角振動数 ω をもつ1個の調和振動子を古典的に考察する。位置を x，運動量を p として，調和振動子のハミルトニアンは

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{1}$$

で与えられる。

(a) 分配関数を古典統計力学の近似に基づいて計算せよ。分配関数に対する古典的統計力学の近似とは，分配関数を

$$Z_c(T) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\beta H} \tag{2}$$

と表すことである。

(b) この系の内部エネルギーおよび熱容量を求めよ。

問2　質量 m，角振動数 ω をもつ1個の調和振動子を量子論的に考える。エネルギーは

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{3}$$

で与えられる。ここで n は非負の整数である。

(a) 分配関数を量子論的に計算せよ。量子論的には，分配関数 $Z(T)$ は，

$$Z(T) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} \tag{4}$$

で与えられる。

次ページに続く

[IV] の続き

(b) この系の内部エネルギー $\varepsilon(T)$ が

$$\varepsilon(T) = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\right) \tag{5}$$

となることを示せ。

(c) この系の熱容量を求め，高温極限での値と低温での漸近形を求めよ。

(d) 熱容量の温度依存性の概形を図示せよ。

問３　固体中の原子は，平衡点のまわりで振動している。この固体中の振動は，いろいろな振動数をもち，互いに独立な調和振動子の集まりとして記述されると考えることができる。振動数が ω と $\omega + d\omega$ の間にある振動のモードの数 $D(\omega)d\omega$ は

$$D(\omega) = \begin{cases} \dfrac{9N}{\omega_{\mathrm{D}}^3}\omega^2 & \cdots \omega \leq \omega_{\mathrm{D}} \\ \\ 0 & \cdots \omega > \omega_{\mathrm{D}} \end{cases} \tag{6}$$

を用いて与えられると仮定する。ここで N は原子の数を示し，ω_{D} はデバイ振動数と呼ばれる定数である。(5) 式で与えられる $\varepsilon(T)$ を用いると，全系の内部エネルギー $E(T)$ は

$$E(T) = \int_0^\infty d\omega\, D(\omega)\, \varepsilon(\omega) \tag{7}$$

で与えられる。

(a) 高温極限での熱容量の値を求めよ。

(b) 低温での熱容量の漸近形を求めよ。ただし，必要であれば

$$\int_0^\infty \frac{t^4 e^t}{(e^t - 1)^2} dt = \frac{4}{15}\pi^4 \tag{8}$$

を用いてもよい。

(c) 熱容量の温度依存性の概形を図示せよ。