一般化多重調和数の補間関数と多重ポリログ関数

中村　弥生　近畿大学理工学部理学科数学コース

18 世紀に GoldBach や Euler 達によって研究されていた多重ゼータ値 (オイラー・ザギエー型多重ゼータ値) $\zeta(\mathbf{k}) = \displaystyle\sum_{m_1>m_2>\cdots>m_d>0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \ldots m_d^{k_d}}$ $(k_j \in \mathbb{N}, k_1 \geq 2)$ は，1990 年代になり活発に研究されはじめ，数学だけでなく，物理学や様々な自然科学における現象に関する不変量として現れることが分かってきた．

多重ゼータ値研究の目標の一つに，多重ゼータ値の張る $\mathbb{Q}$-ベクトル空間に対する次元予想の解決が挙げられる．

次元予想　(Don Zagier (1994)) $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して，Z_k を $k_1 + \cdots + k_d$ が k である多重ゼータ値 $\zeta(k_1, \ldots, k_d)$ の張る $\mathbb{Q}$-ベクトル空間とする：

$$Z_0 = \mathbb{Q}, \quad Z_1 = 0, \quad Z_k = \sum_{\substack{k-1 \geq d \geq 1 \\ k_1, \ldots, k_{d-1} \geq 1, k_1 \geq 2}} \mathbb{Q}\zeta(\mathbf{k}).$$

d_j を次で与えられる数列とする：$d_0 = 1, d_1 = 0, d_2 = 1, d_k = d_{k-2} + d_{k-3} \quad (k \geq 3)$.
このとき，$\dim_{\mathbb{Q}} Z_k = d_k$ が成り立つ．

講演では，次元予想への最も基本的なアプローチ法の一つである多重ゼータ値の線形関係式の導出に対する留数解析を用いた手法を紹介した．この手法の要となったのは一般化多重調和数の補間関数の導入であり，この関数と留数計算を組み合わせることで多重ゼータ値を特殊値にもつ複素関数の一つである多重ポリログ関数の解析接続の構成的証明を与えた．この結果の系として，次の多重ゼータ値の関係式 (Parity Result) を導出することができる．

$$\begin{aligned}
\zeta(\mathbf{k}) + (-1)^{d+k+1}\zeta^\star(\mathbf{k}) &= \sum_{n_1+n_2+n_3=|\mathbf{k}^1|} \frac{(2\pi i)^{n_1} B_{n_1}}{n_1!} \underline{(k_1)_{n_2}} \left\{ \sum_{1 \leq \tau \leq d-1} \sum_{\substack{j=\tau \\ n_3 \geq |\mathbf{k}^j|}}^{d} (-1)^j \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{\substack{\mathbf{t}_\tau \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^\tau \\ |\mathbf{t}_\tau| = n_3 - (|(\mathbf{k}_\tau)^1| + |\mathbf{k}^j|)}} \prod_{i=2}^{\tau} \underline{(k_i)_{t_i}} \zeta_\sigma(\mathbf{k}^j, t_1) \zeta^\star(k_1 + n_2, (\mathbf{k}_\tau + \mathbf{t}_\tau)^1) \right\} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{d} (-1)^j \sum_{n=0}^{|\mathbf{k}_j|} \frac{(2\pi i)^n B_n}{n!} \zeta_\sigma(\mathbf{k}^j, |\mathbf{k}_j| - n)
\end{aligned}$$

ただし B_n はベルヌーイ数 $(B_1 = -\frac{1}{2})$, $\underline{(l)_n} = \dfrac{(-1)^l (l)_n}{n!}$ であり，$\zeta_\sigma(\mathbf{k})$ は多重ゼータ値の有理数係数の線形和で与えられる実数である．

参考文献

[1] K. Ihara, Y. Nakamura and S. Yamamoto, *Interpolant of truncated multiple zeta functions*, preprint (http://arxiv.org/abs/2407.20509).

[2] Y. Kusunoki, Y. Nakamura and Y. Sasaki, *Functional relation formula for analytic continuation of multiple polylogarithm*, Acta Arithmetica, **195** (2020), 131-148.

[3] Y. Kusunoki and Y. Nakamura, *An interpolation function of multiple harmonic sum*, Res. Number Theory, (2022) 8:81.

[4] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, in First European Congress of Mathematics, Volume II, Progress in Math. **120**, 1994, 497–512.